

УДК 681.3.069

*С.Л. Гладкий Л.Н. Ясницкий***РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
МЕТОДОМ ФИКТИВНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ<sup>1</sup>**

Предложен аналитический метод решения линейных задач термоупругости. Дано краткое описание метода. Приведены частные решения плоских задач термоупругости. Применение метода продемонстрировано на примере.

**Постановка краевой задачи**

Найти функцию координат  $U(p)$ , удовлетворяющую в пределах тела  $D$  (рис.1, а) основному уравнению задачи

$$L(U(p)) = 0, \quad p \in D, \quad (1)$$

а на поверхности тела  $S$  – уравнениям граничных условий (граничным уравнениям)

$$l_m(U(p))|_{S_m} = l_m^*, \quad m = \overline{1, M}. \quad (2)$$

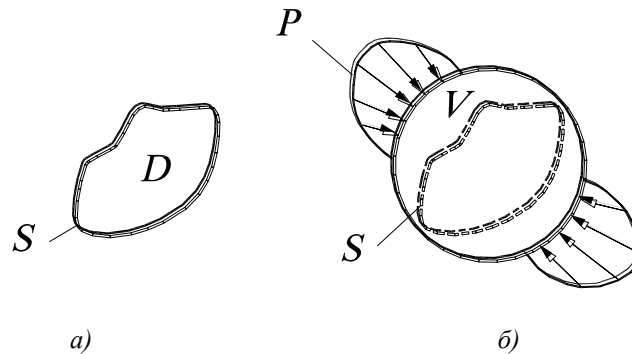


Рис.1. Погружение исходного тела  $D$  с поверхностью  $S$  в каноническое тело  $V$

Здесь  $L$  – некоторый оператор, назовем его основным оператором задачи. Искомая функция  $U(p)$  может иметь самую различную математическую природу – скаляр, вектор, тензор и т.д. – и различный физический смысл.  $l_m$  – операторы граничных уравнений (граничные операторы);  $l_m(U(p))|_{S_m}$  – их значения на частях поверхности  $S_m$ ;  $l_m^*$  – заданные функции, причем каждая из них определена на части поверхности  $S_m$ , и объединение всех  $S_m$  составляет полную поверхность  $S$ :

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-01-01049.

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_M = S. \quad (3)$$

Основное уравнение (1) имеет, как правило, бесконечное множество решений, и граничные уравнения (2) позволяют выделить из этого множества единственное решение, соответствующее краевой задаче. Таким образом, уравнения (1) и (2) определяют полную постановку однородной краевой задачи (далее будем называть ее задача (\*)). На практике часто встречаются неоднородные краевые задачи, когда уравнение (1) имеет вид

$$L(U(p)) = F(p), \quad (4)$$

где  $F(p)$  - некоторая функция координат. Задачи термоупругости являются именно неоднородными краевыми задачами.

#### **Идея метода фиктивных канонических областей (ФКО)**

Пусть требуется решить однородную краевую задачу (\*). Существуют такие области, называемые каноническими, для которых можно получить решение уравнения (1) (обычно методом разделения переменных Фурье) в виде бесконечного ряда – назовем его общим решением основного уравнения:

$$U(p) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(p), \quad (5)$$

где  $u_n(p)$  – координатные функции, тождественно удовлетворяющие уравнению (1),  $c_n$  – постоянные коэффициенты, определяемые граничными условиями на поверхности канонического тела  $V$ . Если теперь исходное тело  $D$  вписать в каноническое тело  $V$  (рис. 1, б), для которого известно решение уравнения (1) в виде (5), и создать на поверхности тела  $V$  такие граничные условия, что на поверхности  $S$  будут выполнены граничные уравнения (2), то решение (5) будет решением краевой задачи (\*). Математически задача нагружения фиктивного тела  $V$  (создание необходимых граничных условий на его поверхности) состоит в подборе коэффициентов  $c_n$ , обеспечивающих выполнение на  $S$  условий (2). Методы нахождения коэффициентов  $c_n$  при ограниченном  $N$  и другие аспекты применения метода ФКО приведены в работах [1-5] и в настоящей статье не рассматриваются.

При решении неоднородных задач в общем случае (для произвольной функции  $F(p)$ ) нельзя записать решение уравнения (4) для канонической области. Однако на практике часто встречаются задачи, когда функция  $F(p)$  заранее известна с точностью до константы. Тогда общее решение уравнения (4) можно представить в виде

$$U(p) = U_0(p) + U_F(p), \quad (6)$$

где  $U_0(p)$  – общее решение однородного уравнения (1) (совпадает с решением (5)),  $U_F(p)$  – любое частное решение уравнения (4).

### Задача линейной термоупругости в перемещениях

При решении задач линейной термоупругости в перемещениях основное уравнение задачи в общем случае можно записать в виде

$$L(\bar{U}(p)) = R(T(p)), \quad (7)$$

где  $\bar{U}(p)$  – вектор перемещений;  $T(p)$  – температура;  $L$  и  $R$  – дифференциальные операторы. Вид уравнения (7) для различных случаев приведен ниже.

Как отмечалось ранее, нельзя получить частное решение уравнения (7) при произвольном распределении температур. Однако если температурная задача так же решается методом ФКО, то распределение температур представляет собой общее решение вида (5), т.е. оно заранее известно с точностью до постоянных множителей. Таким образом, для решения задач термоупругости методом ФКО необходимо получить какое-либо частное решение уравнения (7) и общее решение этого же уравнения при  $R(T(p)) \equiv 0$  (т.е. однородного уравнения). Общие решения однородного уравнения совпадают с решениями упругих задач [6], в настоящей статье они не приводятся.

#### Вывод частных решений для плоских задач термоупругости<sup>2</sup>

Рассмотрим плоскую задачу термоупругости в декартовой системе координат  $(x, y)$ . Распределение температуры подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2 T = 0, \quad (8)$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Уравнение Лапласа (8) имеет общее решение:

$$\begin{aligned} T &= T_{00} + T_{10} + T_{20} + T_{30} + \sum_{n=1}^{\infty} (T_{1n} + T_{2n} + T_{3n} + T_{4n}), \\ T_{00} &= A_{00}, \quad T_{10} = A_{10}x, \quad T_{20} = A_{20}y, \quad T_{30} = A_{30}xy, \\ T_{1n} &= A_{1n} \sin(a_n x) \sinh(a_n y), \quad T_{2n} = A_{2n} \cos(a_n x) \sinh(a_n y), \\ T_{3n} &= A_{3n} \sin(a_n x) \cosh(a_n y), \quad T_{4n} = A_{4n} \cos(a_n x) \cosh(a_n y), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $a_n$  – некоторая константа.

Уравнения равновесия в перемещениях по [7] для плосконапряженного состояния имеют следующий вид:

---

<sup>2</sup> Все решения получены в математической системе Maple 6.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} (U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (U_y) \right) + \frac{\nabla^2 (U_x)}{2(1+\nu)} - \frac{\alpha}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} (T) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (U_y) \right) + \frac{\nabla^2 (U_y)}{2(1+\nu)} - \frac{\alpha}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} (T) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $U_x, U_y$  – компоненты вектора перемещений,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения.

Связь напряжений, деформаций и перемещений выражается формулами

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \quad (12)$$

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)}{1-\nu^2} - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \quad \sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)}{1-\nu^2} - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \quad \sigma_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu}, \quad (13)$$

где  $E$  – модуль Юнга.

Подставляя общее решение (10) в уравнения (11) и выполняя интегрирование, получаем частное решение задачи термоупругости для плосконапряженного состояния:

$$\begin{aligned} U_{x00} &= \alpha A_{00} x, & U_{y00} &= \alpha A_{00} y; \\ U_{x10} &= \frac{1}{2} \alpha A_{10} (x-y)(x+y), & U_{y10} &= \alpha A_{10} xy; \\ U_{x20} &= \alpha A_{20} xy, & U_{y20} &= \frac{1}{2} \alpha A_{20} (y-x)(x+y); \\ U_{x30} &= -\frac{1}{6} \alpha A_{30} (-3x^2 + y^2) y, & U_{y30} &= \frac{1}{6} \alpha A_{30} (3y^2 - x^2) x; \\ U_{x1n} &= -\frac{\alpha A_{1n}}{a_n} \cos(a_n x) \sinh(a_n y), & U_{y1n} &= \frac{\alpha A_{1n}}{a_n} \sin(a_n x) \cosh(a_n y); \\ U_{x2n} &= \frac{\alpha A_{2n}}{a_n} \sin(a_n x) \sinh(a_n y), & U_{y2n} &= \frac{\alpha A_{2n}}{a_n} \cos(a_n x) \cosh(a_n y); \\ U_{x3n} &= -\frac{\alpha A_{3n}}{a_n} \cos(a_n x) \cosh(a_n y), & U_{y3n} &= \frac{\alpha A_{3n}}{a_n} \sin(a_n x) \sinh(a_n y); \\ U_{x4n} &= \frac{\alpha A_{4n}}{a_n} \sin(a_n x) \cosh(a_n y), & U_{y4n} &= \frac{\alpha A_{4n}}{a_n} \cos(a_n x) \sinh(a_n y). \end{aligned} \quad (14)$$

При решении задач термоупругости необходимо иметь формулы для напряжений (для удовлетворения статических граничных условий, расчета напряженного состояния). Во всех приведенных выше частных решениях для перемещений компоненты тензора напряжений тождественно равны нулю. Из

этого можно сделать вывод, что при отсутствии ограничений по перемещениям для любого распределения температур вида (10) в теле не появятся напряжения, какие бы температурные градиенты при этом не возникали. Аналогичный вывод для несколько более общего случая доказан в работе [8].

Теперь рассмотрим плоскодеформированное состояние. Уравнения равновесия в перемещениях по [7] имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} (U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (U_y) \right) + \frac{\nabla^2 (U_x)}{2(1+\nu)} - \frac{\alpha}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} (T) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (U_y) \right) + \frac{\nabla^2 (U_y)}{2(1+\nu)} - \frac{\alpha}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} (T) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Связь деформаций с перемещениями аналогична плосконапряженному состоянию, а напряжения связаны с деформациями формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E((1+\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}, & \sigma_y &= \frac{E((1+\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu}, & \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha T. \end{aligned} \quad (16)$$

Частное решение задачи термоупругости для плоскодеформированного состояния получается после подстановки (10) в (15) и интегрирования:

$$\begin{aligned} U_{x00} &= \alpha(1+\nu)A_{00}x, & U_{y00} &= \alpha(1+\nu)A_{00}y; \\ U_{x10} &= \frac{1}{2}\alpha(1+\nu)A_{10}(x-y)(x+y), & U_{y10} &= \alpha(1+\nu)A_{10}xy; \\ U_{x20} &= \alpha(1+\nu)A_{20}xy, & U_{y20} &= \frac{1}{2}\alpha(1+\nu)A_{20}(y-x)(x+y); \\ U_{x30} &= -\frac{1}{6}\alpha(1+\nu)A_{30}(-3x^2 + y^2)y, & U_{y30} &= \frac{1}{6}\alpha(1+\nu)A_{30}(3y^2 - x^2)x; \\ U_{x1n} &= -\frac{\alpha(1+\nu)A_{1n}}{a_n} \cos(a_n x) \sinh(a_n y), & U_{y1n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{1n}}{a_n} \sin(a_n x) \cosh(a_n y); \\ U_{x2n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{2n}}{a_n} \sin(a_n x) \sinh(a_n y), & U_{y2n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{2n}}{a_n} \cos(a_n x) \cosh(a_n y); \\ U_{x3n} &= -\frac{\alpha(1+\nu)A_{3n}}{a_n} \cos(a_n x) \cosh(a_n y), & U_{y3n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{3n}}{a_n} \sin(a_n x) \sinh(a_n y); \end{aligned}$$

$$U_{x4n} = \frac{\alpha(1+\nu)A_{4n}}{a_n} \sin(a_n x) \cosh(a_n y), \quad U_{y4n} = \frac{\alpha(1+\nu)A_{4n}}{a_n} \cos(a_n x) \sinh(a_n y). \quad (17)$$

Частные решения для всех компонент тензора напряжений, кроме  $\sigma_z$ , тождественно равны нулю.

Рассмотрим теперь плоскую задачу термоупругости в полярной системе координат (СК)  $(r, \varphi)$ . Оператор Лапласа в полярной СК имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (18)$$

Общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде

$$\begin{aligned} T &= T_{00} + T_{10} + \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}, \\ T_{00} &= A_{00}, \quad T_{10} = A_{10} \ln(r), \\ T_{1n} &= A_{1n} \sin(n\varphi) r^n, \quad T_{2n} = A_{2n} \cos(n\varphi) r^n, \\ T_{3n} &= A_{3n} \sin(n\varphi) r^{-n}, \quad T_{4n} = A_{4n} \cos(n\varphi) r^{-n}. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения равновесия в полярной СК для плосконапряженного состояния имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_r) + \frac{\partial}{\partial r}(U_r) - \frac{U_r}{r^2} + \frac{1-\nu}{2r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(U_r) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(U_\varphi) \right) + \\ &+ \frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r}(U_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r}(U_\varphi) \right) - \alpha(1+\nu) \frac{\partial}{\partial r}(T) = 0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(U_\varphi) + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r}(U_\varphi) - \frac{U_\varphi}{r^2} \right) + \\ &+ \frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r}(U_r) + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}(U_r) - \frac{\alpha(1+\nu)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(T) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Связь деформаций с перемещениями в полярной СК

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_\varphi}{r}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial U_\varphi}{r} \right). \quad (21)$$

Связь напряжений с деформациями аналогична декартовой СК при соответствующей замене индексов.

Для плосконапряженного состояния получаем следующие частные решения:

$$\begin{aligned} U_{r00} &= \alpha A_{00} r, & U_{\varphi 00} &= 0, & \sigma_{r00} &= 0, & \sigma_{\varphi 00} &= 0, & \sigma_{r\varphi 00} &= 0; \\ U_{r10} &= \frac{1}{2} \alpha (1+\nu) A_{10} r \ln(r), & U_{\varphi 10} &= 0; \\ \sigma_{r10} &= \frac{1}{2} \alpha E A_{10} \left( -\ln(r) + \frac{1}{1-\nu} \right), & \sigma_{\varphi 10} &= \frac{1}{2} \alpha E A_{10} \left( -\ln(r) + \frac{\nu}{1-\nu} \right), & \sigma_{r\varphi 10} &= 0; \\ U_{r1n} &= \frac{\alpha A_{1n}}{n+1} \sin(n\varphi) r^{n+1}, & U_{\varphi 1n} &= -\frac{\alpha A_{1n}}{n+1} \cos(n\varphi) r^{n+1}; \\ U_{r2n} &= \frac{\alpha A_{2n}}{n+1} \cos(n\varphi) r^{n+1}, & U_{\varphi 2n} &= \frac{\alpha A_{2n}}{n+1} \sin(n\varphi) r^{n+1}; \\ U_{r3n} &= \frac{\alpha A_{3n}}{1-n} \sin(n\varphi) r^{1-n}, & U_{\varphi 3n} &= \frac{\alpha A_{3n}}{1-n} \cos(n\varphi) r^{1-n}; \\ U_{r4n} &= \frac{\alpha A_{4n}}{1-n} \cos(n\varphi) r^{1-n}, & U_{\varphi 4n} &= -\frac{\alpha A_{4n}}{1-n} \sin(n\varphi) r^{1-n}; \\ \sigma_{rin} &= 0, & \sigma_{\varphi in} &= 0, & \sigma_{r\varphi in} &= 0, & i &= \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (22)$$

При  $n=1$  и  $m=3,4$  формулы для перемещений и напряжений имеют иной вид

$$\begin{aligned} U_{r31} &= \alpha A_{31} \sin(\varphi) \ln(r), & U_{\varphi 31} &= \alpha A_{31} \cos(\varphi) \left( \ln(r) - \frac{1+\nu}{3-\nu} \right); \\ \sigma_{r31} &= -\frac{2\alpha\nu E A_{31}}{(1+\nu)(3-\nu)r} \sin(\varphi), & \sigma_{\varphi 31} &= -\frac{2\alpha E A_{31}}{(1+\nu)(3-\nu)r} \sin(\varphi); \\ \sigma_{r\varphi 31} &= \frac{2\alpha E A_{31}}{(1+\nu)(3-\nu)r} \cos(\varphi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{r41} &= \alpha A_{41} \cos(\varphi) \ln(r), & U_{\varphi 41} &= -\alpha A_{41} \sin(\varphi) \left( \ln(r) - \frac{1+\nu}{3-\nu} \right); \\
\sigma_{r41} &= -\frac{2\alpha \nu E A_{41}}{(1+\nu)(3-\nu)r} \cos(\varphi), & \sigma_{\varphi 41} &= -\frac{2\alpha E A_{41}}{(1+\nu)(3-\nu)r} \cos(\varphi); \\
\sigma_{r\varphi 41} &= -\frac{2\alpha E A_{41}}{(1+\nu)(3-\nu)r} \sin(\varphi).
\end{aligned} \tag{23}$$

Для плоскодеформированного состояния уравнения равновесия в полярной СК имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_r) + \frac{\partial}{\partial r}(U_r) - \frac{U_r}{r^2} + \frac{1-2\nu}{2r^2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(U_r) + \\
&+ \frac{1}{2r(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r}(U_\varphi) - \frac{3-4\nu}{2r^2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \varphi}(U_\varphi) - \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r}(T) = 0, \\
&\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(U_\varphi) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r}(U_\varphi) - \frac{U_\varphi}{r^2} \right) + \\
&+ \frac{1}{2r(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r}(U_r) + \frac{3-4\nu}{2r^2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \varphi}(U_r) - \frac{\alpha(1+\nu)}{r(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \varphi}(T) = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Получаем следующие частные решения для плоскодеформированного состояния

$$\begin{aligned}
U_{r00} &= \alpha(1+\nu)A_{00}r, & U_{\varphi 00} &= 0, & \sigma_{r00} &= 0, & \sigma_{\varphi 00} &= 0, & \sigma_{r\varphi 00} &= 0; \\
U_{r10} &= \frac{1}{2} \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} A_{10} r \ln(r), & U_{\varphi 10} &= 0; \\
\sigma_{r10} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \alpha E A_{10} \left( -\ln(r) + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right); \\
\sigma_{\varphi 10} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \alpha E A_{10} \left( -\ln(r) + \frac{\nu}{1-2\nu} \right); \\
\sigma_{r\varphi 10} &= 0;
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
U_{r1n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{1n}}{n+1} \sin(n\varphi)r^{n+1}, & U_{\varphi1n} &= -\frac{\alpha(1+\nu)A_{1n}}{n+1} \cos(n\varphi)r^{n+1}; \\
U_{r2n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{2n}}{n+1} \cos(n\varphi)r^{n+1}, & U_{\varphi2n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{2n}}{n+1} \sin(n\varphi)r^{n+1}; \\
U_{r3n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{3n}}{1-n} \sin(n\varphi)r^{1-n}, & U_{\varphi3n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{3n}}{1-n} \cos(n\varphi)r^{1-n}; \\
U_{r4n} &= \frac{\alpha(1+\nu)A_{4n}}{1-n} \cos(n\varphi)r^{1-n}, & U_{\varphi4n} &= -\frac{\alpha(1+\nu)A_{4n}}{1-n} \sin(n\varphi)r^{1-n}; \\
\sigma_{rin} &= 0, & \sigma_{\varphi in} &= 0, & \sigma_{r\varphi in} &= 0, & i &= \overline{1,4}.
\end{aligned} \tag{25}$$

При  $n=1$  и  $m=3,4$  получаем

$$\begin{aligned}
U_{r31} &= \alpha A_{31} \sin(\varphi) \ln(r), & U_{\varphi31} &= \alpha A_{31} \cos(\varphi) \left( \ln(r) - \frac{1+2\nu}{3-4\nu} \right); \\
\sigma_{r31} &= -\frac{5\alpha\nu E A_{31}}{(1+\nu)(3-4\nu)r} \sin(\varphi), & \sigma_{\varphi31} &= -\frac{(2-\nu)\alpha E A_{31}}{(1+\nu)(3-4\nu)r} \sin(\varphi); \\
\sigma_{r\varphi31} &= \frac{(2-\nu)\alpha E A_{31}}{(1+\nu)(3-4\nu)r} \cos(\varphi); \\
U_{r41} &= \alpha A_{41} \cos(\varphi) \ln(r), & U_{\varphi41} &= -\alpha A_{41} \sin(\varphi) \left( \ln(r) - \frac{1+2\nu}{3-4\nu} \right); \\
\sigma_{r41} &= -\frac{5\alpha\nu E A_{41}}{(1+\nu)(3-4\nu)r} \cos(\varphi), & \sigma_{\varphi41} &= -\frac{(2-\nu)\alpha E A_{41}}{(1+\nu)(3-4\nu)r} \cos(\varphi); \\
\sigma_{r\varphi41} &= -\frac{(2-\nu)\alpha E A_{41}}{(1+\nu)(3-4\nu)r} \sin(\varphi).
\end{aligned} \tag{26}$$

### Пример решения задачи.

На рис. 2 изображена расчетная схема задачи. Две области:  $D_1$  и  $D_2$ , с разными свойствами находятся в неразрывном контакте. Материал области  $D_1$  – резиноподобный, свойства материала области  $D_2$  близки к свойствам стали. На внутренней границе области  $D_1$  задана температура  $T_1 = 300$  °С и давление  $P = 1 \cdot 10^7$  Па, на внешней границе области  $D_2$  температура  $T_2 = 20$  °С. В силу циклической симметрии задачи достаточно рассмотреть 1/8 часть области. Для решения задачи методом ФКО область  $D_1$  была погружена в пересечение фиктивных кольца и полости, а  $D_2$  в фиктивное кольцо. На аспектах погружения мы останавливаться не будем, а отметим лишь, что фиктивная область кольцо содержит все решения в полярной системе координат, а полость – только сингулярные.

Для решения задачи термоупругости сначала была решена температурная задача. Результаты для 1/8 части расчетной области приведены на рис. 3. Далее по изложенному методу решена задача термоупругости. Результаты приведены для 1/8 части области: на рис. 4 – деформированное состояние, на рис. 5 – интенсивность напряжений в сечении области вдоль оси  $x$ .

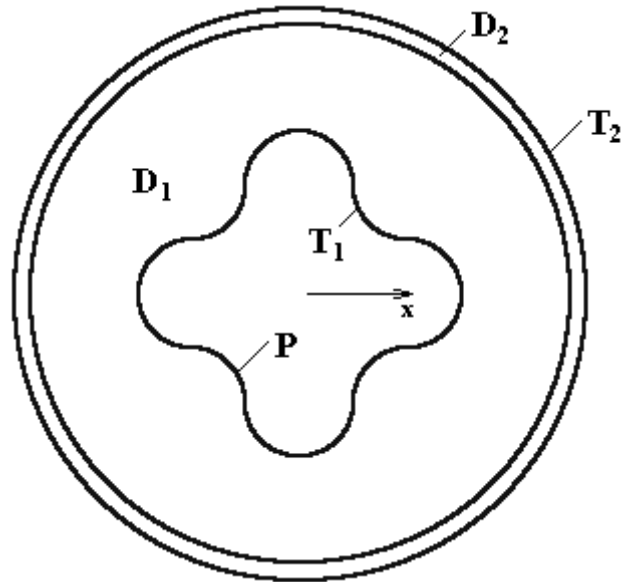


Рис. 2. Расчетная схема задачи

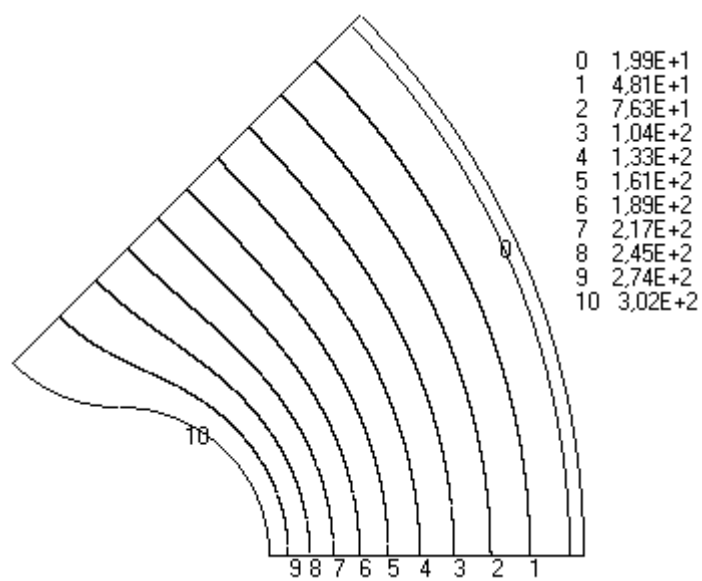


Рис. 3. Результаты расчета температур в градусах Цельсия для 1/8 части расчетной области

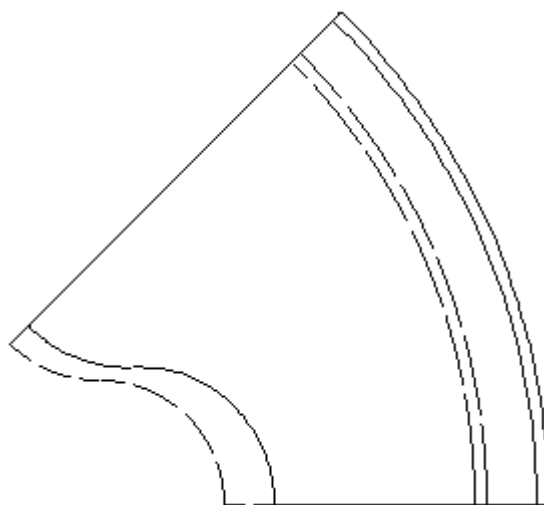


Рис. 4. Результаты расчета деформированного состояния для 1/8 части расчетной области: пунктирная линия – недеформированное, сплошная – деформированное

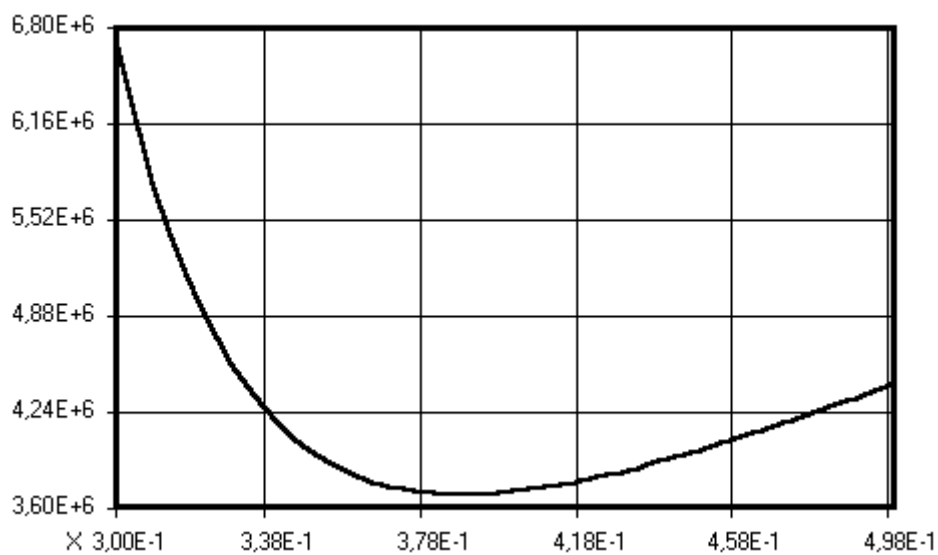


Рис. 5. Интенсивность напряжений в сечении области вдоль оси  $x$  (Па)

После подстановки полученного аналитического решения в граничные уравнения было установлено, что погрешность удовлетворения граничных условий как по температуре, так и по напряжениям и перемещениям не превысила 0,01 %. Таким образом, можно утверждать [2], что получено точное аналитическое решение термоупругой задачи, которая отличается своими граничными условиями от исходной задачи на величину, не превышающую 0,01 %.

### Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм решения задач термоупругости методом ФКО. Получены частные решения уравнений термоупругости для плоско-напряженного и плоско-деформированного состояний, соответствующие общим решениям температурных задач в декартовой и полярной системах координат. Применение метода продемонстрировано на примере, который показывает его эффективность – получено точное аналитическое решение сложной задачи термоупругости. Таким образом, открыта еще одна область применения метода ФКО.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ясницкий Л.Н. Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред. – М.: Наука 1992.— 128 с.
2. Гладкий С.Л., Ясницкий Л.Н. Об оценке погрешности метода фиктивных канонических областей. - Изв. АН РФ. Механика твердого тела (в печати).
3. Гладкий С.Л., Симакина Н.И., Ясницкий Л.Н. О возможностях метода фиктивных канонических областей для решения задач теории упругости // Динамика и прочность машин. Вестник ПГТУ / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2000. № 1.
4. Гладкий С.Л., Ясницкий Л.Н. Алгоритмы оптимизации базисных разложений в методе фиктивных канонических областей// Динамика и прочность машин. Вестник ПГТУ / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2001. № 2.
5. Гладкий С.Л. Система интеллектуального математического моделирования краевых задач в механике сплошных сред. / Тез. докл. десятой Всеросс. Конф. молодых ученых Математическое моделирование в естественных науках / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь 2001.
6. Тимошенко С.П. Теория упругости. – М.: Наука 1975.— 576 с.
7. Боли Б. Теория температурных напряжений. – М.: Мир 1964. – 520 с.
8. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М.: Мир 1962. – 365 с.