

Применение метода фиктивных канонических областей в задачах электростатики

С. Л. Гладкий^{а)}, Е. Л. Тарунин^{б)}, Л. Н. Ясницкий^{б)}

^{а)} Пермский государственный технический университет, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29

^{б)} Пермский государственный университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Многие задачи электростатики сводятся к задаче Дирихле для потенциала электрического поля. Однако соответствующие уравнения эллиптического типа в сложных областях редко имеют аналитическое решение. В данной работе выяснены возможности метода фиктивных канонических областей (ФКО) для двух задач электростатики. В первой задаче находится значение заряда, приобретенного шаром при его соприкосновении с пластиной конденсатора. Во второй задаче находится поправка к силе Кулона в зависимости от расстояния между пластинами.

Ключевые слова: электростатика, сила Кулона, краевая задача

1. Введение

В 1957 году доцентом Н.В. Котельниковым в качестве курсовой работы Е.Л. Тарунину была сформулирована задача – построить тарировочную зависимость периода колебаний маятника в пространстве между обкладками плоского конденсатора от разности потенциала между пластинами $T(U_0)$. Требуемая зависимость была построена для напряжений от 2 до 13 кВ и результаты вполне удовлетворили руководителя. Кроме маятника была еще испытана конструкция с шариком, катающимся между пластины по желобу. К сожалению, данные этой курсовой работы не сохранились. Сохранилась лишь фотография, которая может дать представление о параметрах установки (расстояние между пластинами конденсатора, длина маятника).

После этих экспериментов остались невыясненными многие вопросы, так как не удалось теоретически найти зависимость периода колебаний от приложенной разности потенциалов. Самый первый вопрос при построении теоретической модели заключается в определении заряда, который приобретает металлическим шариком. Этот заряд и вычисляется в первой задаче. Кроме того, было замечено, что при

приближении заряженного шарика к противоположной пластине проскакивала искра. В результате этих разрядов после нескольких испытаний блестящая поверхность стального шарика становилась коричневой.

Похожие проблемы возникали при попытке описать движение ансамбля мелких частиц в пространстве между обкладками цилиндрического конденсатора. Соответствующая экспериментальная установка (демонстрировалась на Всесоюзном съезде по механике в Ташкенте) позволяла визуально видеть регулярные структуры движения частиц.

Знакомство с работами [5-6] привело к мысли корректировать силу, действующую на заряженное тело. Эти корректировки обсуждены при решении обеих задач. В плане исследований находится еще одна задача, инициированная этими же работами, в которых показано, что при малых расстояниях между заряженными шарами с проводящей поверхностью требуется учесть отклонение силы взаимодействия от закона Кулона. В заключение введения отметим, что в работе [7] исследовались колебания различных маятников в электростатическом поле и обнаружены уникальные свойства их поведения, которые раньше не наблюдались.

2. Постановка задачи №1

Проводящее тело касается одной из пластин плоского конденсатора. Требуется определить величину заряда Q_0 , приобретенного этим телом. Эта ситуация изображена на рис.1 для тела в форме шара радиуса a . В математической формулировке требуется решить соответствующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа для потенциала:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi(x, y, H) = U_0, \quad \text{на } G \quad \varphi = 0. \quad (1)$$

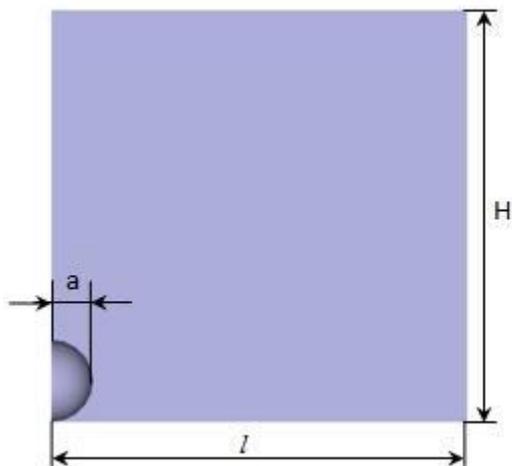


Рис. 1. Геометрия области

Область G включает в себя нижнюю границу области $z = 0$ и поверхность шара (на рис. 1 изображена половина области, так как решение предполагается симметричным относительно вертикальной оси, проходящей через точку касания шара с нижней поверхностью).

После нахождения потенциала величина заряда на шаре определяется по формуле

$$Q_0 = \int D_n dS = \varepsilon\varepsilon_0 \int E_n dS = -\varepsilon\varepsilon_0 \int \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad (2)$$

Здесь D_n - нормальная составляющая индукции электрического поля на поверхности шара, E_n - нормальная составляющая напряженности электрического поля, ε - диэлектрическая постоянная среды, $\varepsilon_0 = \text{const} = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{В} \cdot \text{м}^2)$, напряженность электрического поля связана с потенциалом соотношением $\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$ [1].

Постановка задачи позволяет решать задачу в безразмерных переменных - в области высотой $H=1$ с параметрами $U_0 = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$. Для перехода к размерным значениям заряда требуется безразмерное значение заряда q_0 умножить на $k = \varepsilon\varepsilon_0 |E_0| = \varepsilon\varepsilon_0 (U_0 / H)$: $Q_0 = kq_0$. С учетом осевой симметрии в безразмерных переменных требу-

ется решить задачу Дирихле (3) в сферической области (r, θ) , разрез которой изображен на рис.1.

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2} \text{Ctg}\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0. \quad (3)$$

Задачу можно решать и в цилиндрических координатах (ρ, z) . Связь цилиндрических координат со сферическими дается соотношениями

$$\rho = r \sin(\theta), \quad z = r \cos(\theta). \quad (4)$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

3. Тестовые задачи

Прежде чем обсуждать численное решение задачи для шара, обсудим результаты с приближенными аналитическими решениями для полусферы и тонкой шайбы. В случае полусферы, лежащей на нижней пластине, потенциал равен (это решение нам указал Ю.К. Братухин):

$$\varphi(r, \theta) = \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (6)$$

На полусфере ($r = a$) и в плоскости $z = 0$ потенциал обращается в ноль. Вдали от полусферы ($r \gg a$) $\lim\varphi \rightarrow r \cos \theta = z$, что соответствует потенциалу, невозмущенному наличием полусферы. Решение (6) предполагает, что радиус полусферы гораздо меньше расстояния между пластинами конденсатора. Из (6) легко вычисляется плотность распределения заряда $\sigma(\theta)$ как функция угла и величина приобретенного разряда :

$$\sigma(\theta) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}(a, \theta) = -3 \cos \theta, \quad (7)$$

$$q_0 = \int \sigma(\theta) ds = \int_0^{\pi/2} \sigma(\theta) 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = -3\pi a^2. \quad (8)$$

На элемент поверхности $ds = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$ с зарядом $dq = \sigma(\theta) ds$ действует сила

$$df = -dq \frac{\partial\varphi}{\partial z}(a, \theta) = 18\pi a^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) d\theta. \quad (9)$$

В целом на полусферу действует сила

$$f = \int_0^{\pi/2} df = 4.5\pi a^2. \quad (10)$$

При вычислении силы по формуле для невозмущенного поля получается значение уменьшенное по сравнению с (10) в полтора раза

$$f_0 = q_0 E = 3\pi a^2. \quad (11)$$

Из аналитического решения для полусферы легко вычисляется относительное возмущение потенциала $\delta = (a/r)^3$. Отсюда в частности следует, что на расстояниях $r > 4.64a$ величина $\delta < 1\%$. Следовательно, при значениях $r > 5a$ можно ставить граничные условия, соответствующие невозмущенному потенциалу $\bar{\varphi} = z = r \cos(\theta)$. В методе ФКО невозмущенные граничные условия при малых значениях радиуса шара ($a < 0.1$) задавались на расстоянии $r \geq 10a$.

Рассмотрим вариант с тонкой шайбой, лежащей на пластине с нулевым потенциалом. Для тонкой шайбы ($d \ll 1$) с большим радиусом ($a \gg 1$) в центральной части области следует ожидать значения потенциала и плотности заряда

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{z-d}{1-d}, \quad \tilde{\sigma} = -\frac{1}{1-d}. \quad (12)$$

При таком потенциале легко оцениваются величина заряда и силы

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= -\pi a^2 / (1-d), \\ \tilde{f} &= \pi a^2 / (1-d)^2, \\ \tilde{f}_0 &= \pi a^2 / (1-d). \end{aligned} \quad (13)$$

Как видно, и в этом случае $\tilde{f} > \tilde{f}_0$.

Вариант с шайбой решался и численно методом сеток для параметров: $0.01 \leq d \leq 0.05$, $0.5 \leq a \leq 1.0$. Использовалась квадратная сетка с числом интервалов по каждой координате равным 100. Выяснено, что плотность заряда максимальна на краях шайбы и минимальна в центре шайбы. Отношение $\sigma(a)/\sigma(0)$ убывает при уменьшении толщины шайбы: при $d = 0.02$ это отношение равно 1.31, а при $d = 0.01$ 1.18. Минимальное значение $|\sigma(0)|$ больше значения $|\tilde{\sigma}| = 1/(1-d)$: при $d = 0.02$ обсуждаемое превышение составляет 1.94%, а при $d = 0.01$ лишь 1.015%. Завышенные значения модуля плотности заряда по сравнению с $|\tilde{\sigma}|$ приводят к увеличению модуля заряда и силы: при $d = 0.02$ отношение f/\tilde{f} равно 1.152, а при $d = 0.01$ равно 1.082. Рассмотренные задачи выяснили два важных факта – величина модуля заряда пропорциональна квадрату размера тела, отношение $(f/f_0) > 1$.

4. Результаты для шара

Придем к обсуждению результатов, полученных методом ФКО по программе REGIONS Multi-Physics X. Число слагаемых метода ФКО равнялось 153. Предварительные расчеты выполнялись в области значений $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq l \leq 1$. В этом случае погрешность вычисления плотности заряда на нижней части шара была очень большой (особенно для малых значений радиуса шара $a \leq 0.05$). В окончательных расчетах при $a < 0.1$ границы квадратной области в переменных z, ρ сокращались до $10a$; на этих границах предполагалось заданным невозмущенное значение потенциала $\bar{\varphi} = z$.

Для шара радиуса $a = 0.1$ максимальное отклонение потенциала метода ФКО от заданных значений не превосходило 0.00016. Вычисленное значение модуля заряда оказалось равным $|q_0| = 0.2071 = 6.582\pi a^2$, что примерно в 2.20 раза больше по сравнению с полусферой (в предварительных расчетах величина заряда была на 1.5% выше). Изолинии потенциала для этого случая изображены на рис. 2.

Сделаем замечания относительно погрешности метода ФКО. Метод позволяет получать решение в аналитическом виде (это плюс), но вносит погрешность $|\delta\varphi| \leq \bar{\delta}\varphi$ в граничное условие (это минус). Известно, что в задаче Дирихле выполняется принцип максимума. Согласно этому принципу значения функции внутри области удовлетворяют неравенству $\min \varphi_{\Gamma} \leq \varphi \leq \max \varphi_{\Gamma}$. Погрешность в граничных условиях расширяет это неравенство до следующего: $\min \varphi_{\Gamma} - \bar{\delta}\varphi \leq \varphi \leq \max \varphi_{\Gamma} + \bar{\delta}\varphi$. Малость верхней границы абсолютной погрешности $\bar{\delta}\varphi$ не гарантирует малости относительной погрешности решения. В нашей задаче минимальное значение потенциала равно нулю и, следовательно, относительная погрешность вблизи этой границы формально стремится к бесконечности.

Анализ результатов расчета показал, что значительная погрешность метода возникает в донной части шара, где смыкаются две поверхности с нулевым потенциалом. Для понимания причины погрешности достаточно рассмотреть следующую ситуацию Пусть имеется узкий канал высотой h вдоль горизонтальной оси ρ , имитирующий область вблизи точки касания шара с поверхностью $z = 0$.

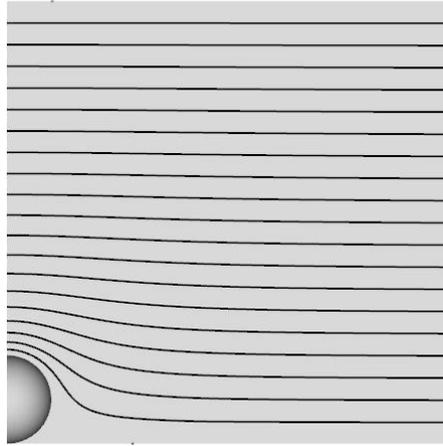


Рис. 2. Изолинии потенциала для шара с радиусом $a = 0.1$

В канале потенциал может быть описан функцией вида $\varphi \approx h\rho^k$ ($k \geq 2$). Вторая производная по координате вдоль канала положительна. Следовательно, для удовлетворения уравнения Лапласа равного нулю вторая производная поперек канала должна быть отрицательной. При равенстве нулю функций на границе это выполняется, например, для разностной производной и сетке с одним узлом в середине канала $(0-2\varphi(\rho, h/2)+0)/(0.5h)^2$. Однако, если на обеих границах не ноль, разностная производная может при $\delta > \varphi(\rho, h/2)$ сменить знак и, таким образом, дать неверный результат.

Для случая $\rho = h$, $k = 2$ неприятности ожидаются при $\delta > h^3$. Отсюда следует, что при $\delta = 0.00016$, например, неприятности возможны уже для $h < 0.05$. Выполненные оценки являются завышенными по требованию точности, но они правильно отражают основной механизм образования большой погрешности решения при формально малом значении $\bar{\delta}\varphi$ и смыкании поверхностей с одинаковым значением потенциала.

Как видно, значительное возмущение потенциала сосредоточено на расстоянии примерно равным трем-четырем радиусам шара.

Величина силы f , действующей на шар при его касании нижней пластины, при $a = 0.1$ равна 0.1189. При подсчете силы по формуле (11) получается значение $f_0 = |q_0| = 0.2071$, что примерно в 1.74 раза больше f . В тестовых примерах было справедливым обратное неравенство $f > f_0$. Обнаруженное расхождение вполне объяснимо. В тестовых примерах для всех участков поверхности $df \geq 0$, а в случае шара в его донной части $df < 0$.

При увеличении радиуса шара вдвое ($a = 0.2$) величина модуля заряда увеличивается в 4.05 раза. Заметим, что при достаточно малых радиусах шара это увеличение должно быть равным 4. Расчеты

при меньших значениях радиуса шара (см. табл. 1) подтвердили ожидаемую зависимость $q_0/a^2 = const$. Согласно расчетам

$$|Q_0| = (\varepsilon\varepsilon_0 U_0 / H)|q_0| = (\varepsilon\varepsilon_0 U_0 / H)(6.591 \pm 0.002)\pi a^2. \quad (14)$$

Таблица 1. Результаты решения для различных значений радиуса шара

Радиус шара a	Заряд $ q_0 $	Погрешность в граничных условиях
0,01	2,0713E-03	0,00016
0,02	8,2832E-03	0,00033
0,05	5,1768E-02	0,00083
0,10	2,0706E-01	0,00170
0,20	8,4848E-01	0,00220

В предварительных расчетах отношение q_0/a^2 при уменьшении радиуса шара убывало: соответствующие значения были равны 19.86, 15.18, 12.13; анализ зависимости поверхностной плотности заряда от полярного угла $\sigma(\theta)$ позволил выяснить, что причина этого отклонения обязана погрешности решения метода ФКО в донной части шара при $\theta > 110^\circ$.

Зависимость поверхностной плотности заряда от полярного угла $\sigma(\theta)$ представлена на рис. 3 для двух значений радиуса шара $a = 0.1$ и $a = 0.2$ (при меньших радиусах зависимость $\sigma(\theta)$ близка к случаю со значением $a = 0.1$).

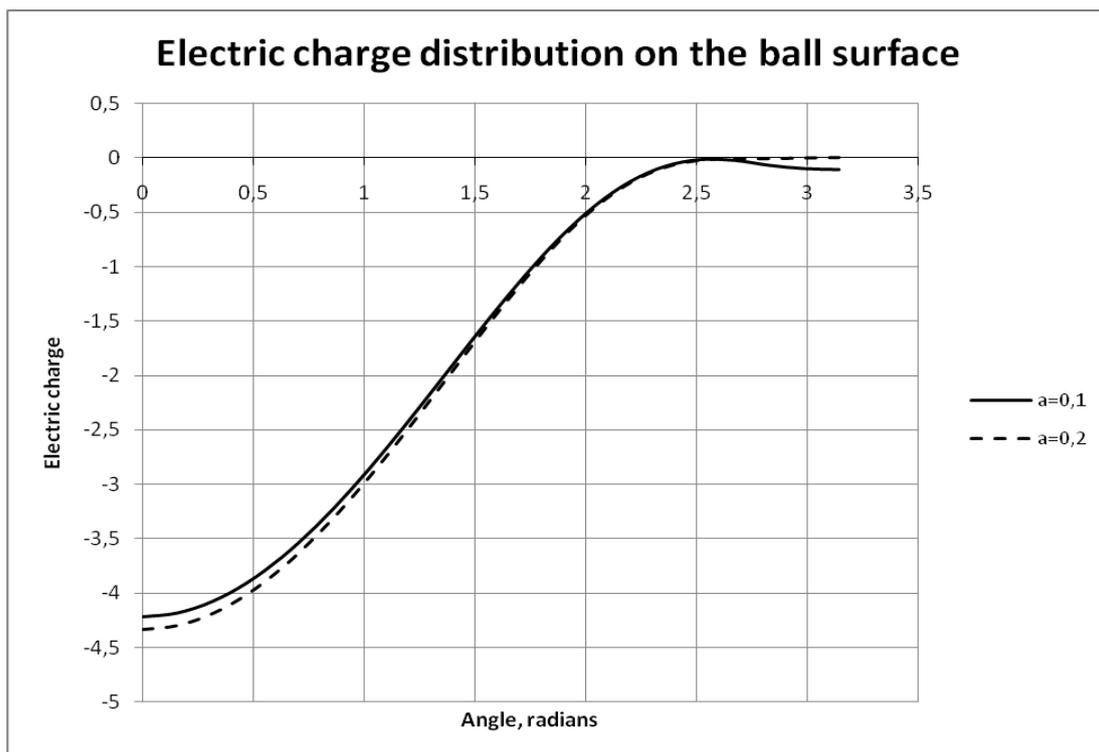


Рис. 3. Зависимость поверхностной плотности заряда от полярного угла

Как видно, при $a = 0.1$ модуль поверхностной плотности заряда монотонно убывает с ростом полярного угла до $\theta \approx 140^\circ$. Значения при углах $\theta > 140^\circ$ следует признать ошибочными, при этих углах модуль поверхностной плотности заряда должен монотонно убывать до нуля.

5. Задача 2

В этом случае центр заряженного проводящего шара находился на расстоянии $h > a$ от нижней пластины. В случае проводящего шара потенциал на нем может быть только постоянным [1]. Этот постоянный потенциал на поверхности шара должен быть найден из условия равенства заряда значению, полученным при соприкосновении шара с пластиной.

Алгоритм требовал решения несколько краевых задач для различных значений потенциала φ_s , заданного на поверхности шара. Полученная зависимость $q(\varphi_s)$ аппроксимировалась полиномом по методу НК. Из полученной аппроксимации находилось значение потенциала, соответствующее заданному заряду. С хорошей точностью зависимость заряда на шаре от потенциала ($h = 0.2$, $a = 0.1$) близка к линейной функции

$$q(\varphi_s) \approx 0.3283 - 1.6936 \varphi_s. \quad (15)$$

Используя значения заряда, приобретенного при касании пластины $q_0 = 0.20706$, из уравнения (15) находится значение потенциала на шаре $\varphi_s(0.2) = 0.0716$.

Аналогичные расчеты были выполнены при других положениях шара с радиусом $a = 0.1$. Результаты этих расчетов (значения потенциала на шаре φ_s , силы f , действующей на шар, и отношение сил f / f_0) представлены в табл. 2. Зависимость потенциала на шаре от расстояния его центра до нижней поверхности изображена на рис.4.

Таблица 2. Результаты решения для различных значений высоты h

Высота h	φ_s	f	f / f_0
0,10	0	1,1890E-01	5,7412E-01
0,15	3,0983E-02	1,2810E-01	6,1854E-01
0,20	7,1587E-02	1,3165E-01	6,3568E-01
0,30	1,6233E-01	1,3521E-01	6,5287E-01
0,50	3,5814E-01	1,3908E-01	6,7156E-01
0,70	5,6702E-01	1,4712E-01	7,1038E-01
0,80	6,8394E-01	1,6714E-01	8,0705E-01
0,85	7,5482E-01	2,1118E-01	1,0197E+00

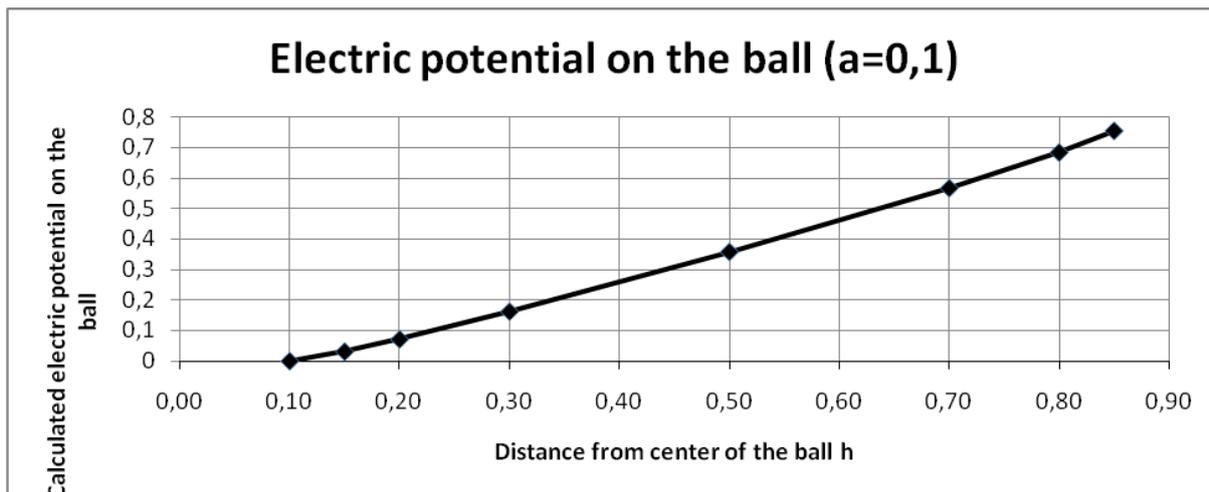


Рис. 4. Зависимость потенциала на шаре от расстояния центра шара до плоскости $z = 0$

Как видно, зависимость $\varphi_S(h)$ близка к прямой, небольшие отклонения от прямой заметны для расстояний близких к пластинам. Тангенс угла наклона зависимости $\varphi_S(h)$ в центральной части примерно равен 1.02. Для сравнения укажем, что тангенс угла наклона прямой, проходящей через точки $\varphi_S(a) = 0$, $\varphi_S(1-a) = 1$, равен 1.25.

При приближении шара к верхней пластине конденсатора возрастает напряженность в пространстве между верхней частью шара и пластиной. Это возрастание напряженности может привести к электрическому пробую. Из получен-

ных результатов следует, что при $h = 0.85$ напряженность в указанной области $E \approx (1 - \varphi_S(h)) / (1 - h) \approx 4.9E_0$.

Зависимость силы, действующей на шар, при различных значениях h для шара с радиусом $a = 0.1$ изображена на рис. 5. Распределение поверхностной плотности заряда $\sigma(\theta)$ при различных расстояниях центра шара от нижней пластины показано на рис. 6.

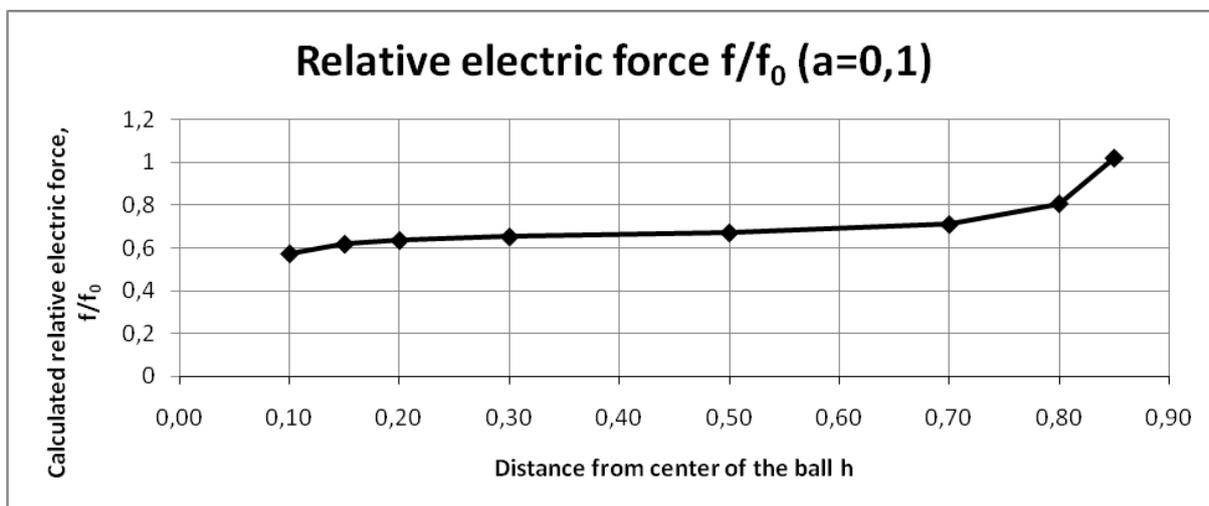


Рис. 5. Зависимость силы, действующей на заряженный радиуса $a = 0.1$, от расстояния его центра до нижней пластины конденсатора

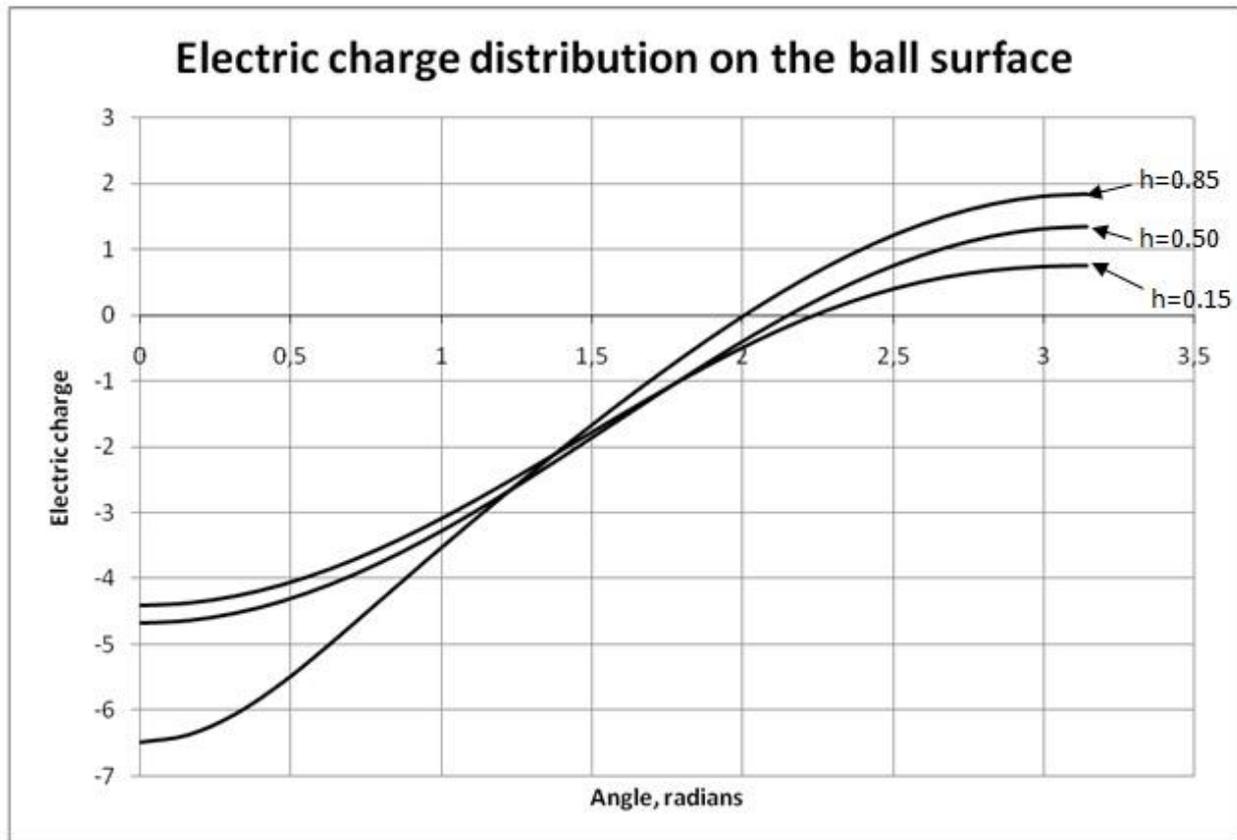


Рис. 6. Зависимость $\sigma(\theta)$ при различных h ($a = 0.1$)

Видно, что при приближении шара к верхней пластине увеличивается значение модуля $\sigma(\theta)$ в верхней части шара ($\theta < 75^\circ$), а в нижней части шара ($\theta > 85^\circ$) уменьшается. Малые изменения $\sigma(\theta)$ соответствует углам $\theta = 80^\circ \pm 5^\circ$. Область положительных значений поверхностной плотности заряда монотонно увеличивается при удалении от нижней пластины и при $h = 0.85$ достигает $\Delta\theta \approx 65^\circ$.

6. Выводы

1. Выявлены положительные и отрицательные свойства метода ФКО.
2. С помощью коррекции метода удалось определить величину заряда, приобретаемого проводящим шаром при его касании пластины плоского конденсатора.
3. Обнаружено существенное (более чем в 1.5 раза) уменьшение величина силы, действующей на заряженный шар в нижней и центральной части, по сравнению с силой, вычисляемой по формуле $f = qE_0$.
4. На малых расстояниях до противоположной пластины сила притяжения увеличивается, но при этом увеличивается вероят-

ность электрического пробоя, который резко уменьшит силу притяжения.

Список литературы

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: ВШ, 2001. 384 с.
2. Ясницкий Л.Н. Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред. – М.: Наука 1992. – 128с.
3. Гладкий С.Л., Ясницкий Л.Н. Об оценке погрешности метода фиктивных канонических областей // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – Москва, 2002. – № 6. – С. 69-75.
4. Гладкий С.Л., Степанов Н.А., Ясницкий Л.Н. Интеллектуальное моделирование физических проблем. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 200 с.
5. Саранин В. А. О взаимодействии двух электрически заряженных проводящих шаров // УФН. 1999. Т. 169. С. 453-458.
6. Саранин В. А., Майер В.В. Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия двух проводящих заряженных шаров // УФН. 2010. Т. 180. С. 1109-1117.
7. Саранин В. А. Электростатический осциллятор (в печати).

Fictitious canonic region method application for electrostatics problems

S. L. Gladkiy^{a)}, E. L. Tarunin^{b)}, L. N. Yasnitskiy^{b)}

^{a)} Perm state technical university, 614990, Perm, Komsomolskiy pr., 29

^{b)} Perm state university, 614990, Perm, Bukireva st., 15

Many of electrostatics problems can be reduced to Dirichlet problem for electric potential. But according elliptic equations rarely have analytical solutions for complicated domains. In this work the possibilities of fictitious canonic region (FCR) method turned out to solve electrostatics problems. In the first problem the charge of a ball is calculated when it touches on of the plane capacitor's plate. In the second problem the correction of Coulomb's force is calculated depending on the distance between plates.

Keywords: electrostatics, Coulomb's force, boundary value problem